ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告[5]

２００８年3月１５日（土）　１４：００−１６：００

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換が等長変換になることを、$Fourier$ 逆変換が $Fourier$ 変換の共役に等しくなるということにより証明した。次に、$Hermite$ 関数の $Fourier$ 変換と $Hermite$ 関数の直交性を $Hermite$ 母関数を用いて示した。最後に、L^2- 近似の基本手段である、熱核と呼ばれる関数の性質について調べた。

2.1　$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の急減少関数全体の作る $\mathfrak{P}(\mathbb{R})-$ 加群とするとき、

$$\mathfrak{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-\sqrt{-1}yx)f(x)|dx| \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(\sqrt{-1}yx)g(y)|dy| \quad \text{for } \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$\mathfrak{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への $\mathbb{C}-$ 線形変換でかつ、全単射写像である。

補題 2.3. 任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$\langle \mathfrak{F}(f), g\rangle = \left\langle f, \mathfrak{F}^{-1}(g)\right\rangle$$

が成立する。すなわち、$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^{-1}$ となる。これから、$\mathfrak{F}$ の $Unitary$ 性が成立する。

$$\therefore \quad \langle \mathfrak{F}(f), \mathfrak{F}(g)\rangle = \langle f, g\rangle \quad for\ \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

特に、

$$\|\mathfrak{F}(f)\| = \|f\| \quad for\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

2.2　$Fourier$ 変換の固有関数

定義 2.1.

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\partial_x^n(\exp(-x^2)) \quad for \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

H_n をｎ次の $Hermite$ **多項式**と言う。また、

$$h_n(x) = H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

とおいたとき、h_n をｎ次の $Hermite$ **関数**と言う。

$Hermite$ 多項式と $Hermite$ 関数の母関数

$$\Theta(t,x) = \sum_{\nu\geq 0}\frac{t^\nu}{\nu!}H_\nu(x) \quad \theta(t,x) = \sum_{\nu\geq 0}\frac{t^\nu}{\nu!}h_\nu(x)$$

を考える。

[5]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

補題 2.4. u を点 $x \in \mathbb{C}$ のまわりで定義された解析関数とするとき、そのベキ級数は $B_r(x)$ で収束して、

$$u(x+h) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{h^\nu}{\nu!} u^{(\nu)}(x) \quad |h| < r$$

を満たす。

補題 2.5. $r > 0$ が存在して、任意の $t \in (-t, t)$ について、、

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{t^\nu}{\nu!} \alpha_\nu = \sum_{\nu \geq 0} \frac{t^\nu}{\nu!} \beta_\nu$$

を満たすならば、すべての $\nu \in \mathbb{N}$ に対して、$\alpha_\nu = \beta_\nu$ が成立する。

定理 2.1.

1. $\mathfrak{F}(h_n) = (-\sqrt{-1})^n h_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

2. $\langle h_m, h_n \rangle = \begin{cases} 2^{2n} n! \sqrt{2\pi} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$

証明略. 1. $Hermite$ 関数の母関数 $\theta(t, x)$ は

$$\theta(t, x) = \sum_{\nu \geq 0} \frac{t^\nu}{\nu!} h_\nu(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 4xt + 2t^2) \right)$$

を計算すると、$Fourier$ 変換の線形性により、$Hermite$ 関数 h_n の $Fourier$ 変換を求めることができる。

2. ２つの母関数の内積 $\langle \theta(t, x), \theta(s, x) \rangle$ を計算することにより、$Hermite$ 関数の直交性を導くことができる。

□

少し先取りして言うと、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密で、$\mathfrak{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で定義された $Unitary$ 変換だから、$\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\tilde{\mathfrak{F}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ に拡張することができる。

2.3 $L^2(\mathbb{R})$ の $Fourier$ 変換

定義 2.2 (熱核). $t > 0$ に対して、

$$W_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} \right)$$

なる型の関数を**熱核**という。

練習問題 2.2.

1. $f \in L^2(\mathbb{R})$ ならば、$W_t * f \in C^\infty$ で、

$$\partial_x^k (W_t * f) = (\partial_x^k W_t) * f$$

2. $\|W_t * f\|_2 \leq \|f\|_2$

記録　J.S